河床波の非線型安定性理論

著者	川村 里実
号	3050
発行年	2002
URL	http://hdl.handle.net/10097/8322

氏名	川村里実（かわむら さとみ）
授与学位	博士（工学）
学位授与年月日	平成15年3月24日
学位授与の根拠法規	学位規則第4条第1項
研究科、専攻の名称	東北大学大学院工学研究科（博士課程）土木工学専攻
学位論文題目	河床波の非線型安定性理論
指導教官	東北大学教授 田中 仁
論文審査委員	主査 東北大学教授 田中 仁　東北大学教授 澤本 正樹 東北大学教授 真野 明　東北大学助教授 泉 典洋

論文内容要旨

河床波（デューン）は洪水時に，流量（あるいは底面せん断力）の増減に応じて発生と消滅を繰り返すことが知られている．すなわち流量（底面せん断力）の小さい領域で発生した河床波（デューン）は，流量（底面せん断力）の増加とともに消滅し，減少とともに再び発生する．このようなデューンの発生機構や流量の変化による挙動については，河道の抵抗予測という工学的重要性から河川工学の分野において古くより多くの研究が行われてきた．

デューン発生に関して多くの線形安定解析が行われ，その発生機構が河床面と流れの間の不安定性によって説明されている．線形安定解析の結果，デューンの形成を支配するパラメータはフルード数であること，フルード数が小さい領域では平坦床は不安定となりデューンが発生すること，フルード数が大きい領域では平坦床は安定となり，さらに大きくなるとアンチデューンが発生することなどが明らかとなっている．流量の大小がフルード数の大小に対応しているとすれば，前出の流量とデューン形成の関係は大略理論によって説明することができる．

デューンが形成されると河床抵抗が増加するが，それについても古くより多くの研究が行われている．多くの実験および現地データから，流量が変化する場合の流量－水深曲線はループを描き，ヒステリシスを示すことが指摘されている．その際，流量増加時の方が減少時に比べて抵抗が大きく水深が大きくなる場合(図1参照)と，流量増加時の方が抵抗が小さくなる場合がある．また前者のケースでは通常，河床形状の突然の遷移によって，抵抗も突然変化することが指摘されている．

デューンで覆われた河床では，デューンによる形状抵抗によって底面せん断力の一部が受け持たれるため土砂輸送に用いられる有効せん断力が全せん断力より小さくなる．従来の数多くの実験データから，ある相対水深を例にとると全せん断力と粒子せん断力の間の関係は図2のように概念的に表されることがわかっている．デューンから平坦床・アンチデューンへと遷移する過程では，有効せん断力と全せん

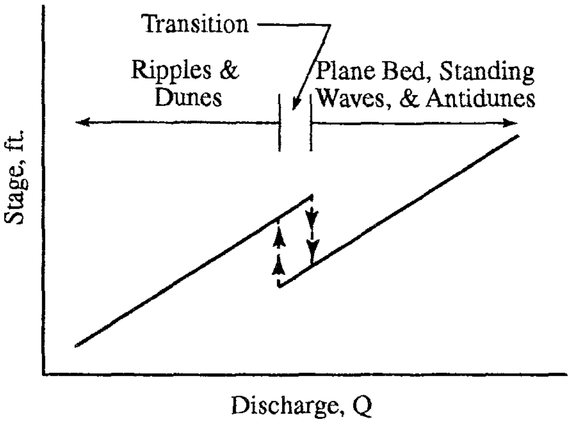

図 1: 流量–水深曲線に見られるヒステリシス現象．流量増加時に河床抵抗が大きくなるケース．

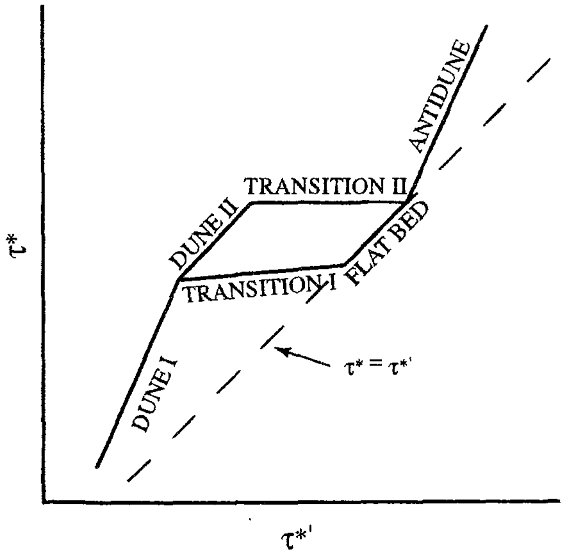

図 2: 全せん断力 τ^* と有効せん断力 $\tau^{*\prime}$ の関係の概念図．

断力の間に二価の関係が存在しており，第二章で述べるように図 1 と同一の事象を異なる表現で表したものと言えるだろう．

遷移過程に見られる全抵抗と摩擦抵抗の間の二価性やヒステリシス現象については，これまで二つの解釈が提出されている．一つは水理条件の変化に伴う河床形状変化の応答遅れによるものであり，実験によって，河床の応答に時間がかかることが確かめられている．もう一つは，一つの流量に対して二つの河床形状が存在するというものである．平坦床の場合，抵抗が小さくなるため水深が小さくなるのに対して，デューン河床の場合，抵抗が大きくなるため同じ流量でも水深が大きくなることが予想される．したがって流量が同一でも河床形状によって水深が異なる場合が存在する．しかし後者の解釈については未だ合理的な説明は提出されておらず，実験などの検証が行われている前者の解釈が主流となっているのが現状である．本研究は，後者の考え，すなわち一つの流量に対して二つの河床形状が存在するという観点から，デューンの弱非線形安定解析を行うことによって，その理論的説明を試みた．

図 1 に類似のヒステリシス現象は，平面 Poiseulle 流れや平板境界層流れの層流－乱流遷移時にも見られることが知られている．一般的にレイノルズ数が増加すると層流が乱流に遷移することはいうまでもないが，平面 Poiseulle 流れの場合，層流－乱流遷移時には 5000 以上まで層流でいることが可能であるのに対し，乱流－層流遷移時にはレイノルズ数が 5000 よりかなり小さくなるまで層流には遷移しないことがわかっている．乱流－層流遷移に対して弱非線形安定解析の手法が用いられ，臨界レイノルズ数近傍の層流－乱流間の分岐形態が亜臨界分岐 (subcritical bifurcation) であることが明らかになっている．解がこの亜臨界分岐をしているような場合，レイノルズ数が増加する領域と減少する領域でヒステリシス現象が現れることがわかっている (図 3 参照)．すなわちレイノルズ数が増加する場合は図 3 中 AC の経路を通り，臨界レイノルズ数（C 点）で突然 D 点に飛び移る．したがって AC 間で振幅 0（層流）の解が現れ，C 点を超えると突然乱流に遷移する．一方レイノルズ数が減少する場合は図中 DB の

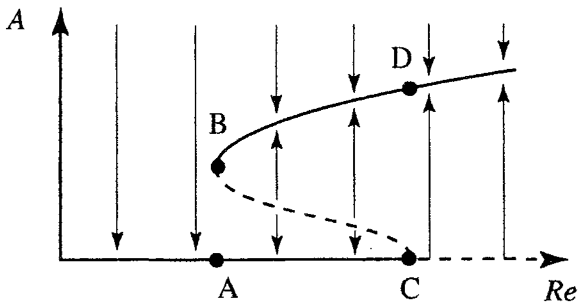

図 3: 平面 Poiseulle 流れに見られる亜臨界分岐.

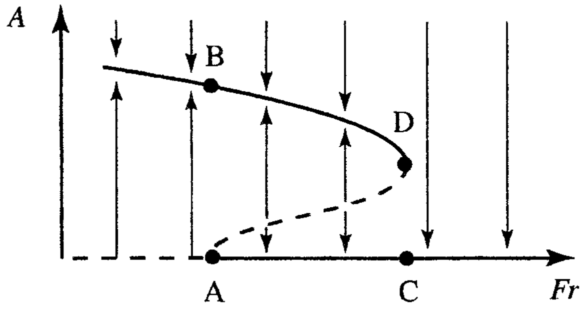

図 4: デューン–平坦床遷移時に予想される分岐形態.

経路を通るため，有限振幅（乱流）の解が現れ，B 点を超えた時点で A 点に飛び移ることで突然層流に遷移する.

デューンの場合も，デューンから平坦床への遷移時に見られるヒステリシス現象が，解の分岐形態に起因していることが類推される．ただしデューンの場合，支配パラメータはフルード数 Fr であり，擾乱に対する安定 → 不安定の方向がパラメータの増減の方向と逆であるなどの相違点があることに注意する必要がある．したがってデューンの場合の分岐図は図 4 のように表せることが予想される．流量が小さくフルード数が小さい状態では，有限振幅を持つデューンが唯一の安定解であるが，フルード数が臨界フルード数（B，A 点）を超えてあるフルード数（D，C 点）に達するまではデューンと平坦床（$A=0$）という二つの安定解が現れる．しかもフルード数が増加する場合 BDC の経路を通るのに対して，フルード数が減少する場合は CAB の経路を通ることになる．この考え方によって，図 1 のようなループを描くこと，また河床形態および河床抵抗の変化が突然に生じること，さらに図 2 に見られるように遷移の生じる水理量が常に一定の範囲に存在することなどを合理的に説明できる.

上述したような解の分岐形態を調べるためには，線形安定解析によって求められる臨界フルード数近傍における解の振る舞いを調べる必要がある．そのために有効な手法が非線形安定解析であり，その代表的な手法が本研究で行われる増幅率展開法である．増幅率展開法では，臨界フルード数のごく近傍の分岐形状を調べるために次のようなパラメータ ν を導入し，すべての変数を ν を用いて展開する.

$$\nu^2 = \frac{|Fr - F_c|}{F_c} \tag{1}$$

上式はフルード数 Fr が F_c より ν^2 程度のオーダーだけ離れていることを意味している．フルード数が臨界フルード数に等しいとき擾乱の増幅率はゼロとなり，臨界フルード数より ν^2 のオーダーだけ離れた領域では，増幅率自身も ν^2 のオーダーとなることが期待できる．したがって ν で展開することは増幅率で展開することと等価であることがわかる．このように増幅率を微小パラメータとして全ての変数を展開すると ν の 3 次のオーダーにおいて振幅の非線形時間発展を記述する，次のようなランダウ方程式が得られる.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A + \cdots \tag{2}$$

もし振幅が十分小さい場合，上式の第2項は非常に小さくなり無視することが可能となる．そのとき式(2)は容易に解けて，増幅率 α_0 で指数関数的に増幅 ($\alpha_0 > 0$ の場合) あるいは減衰 ($\alpha_0 < 0$) することがわかる．すなわち α_0 は線形安定解析から導かれる成長率に等価であることがわかる．振幅がある程度大きくなると第2項は無視しえなくなる．第2項の係数 α_1 はランダウ定数として知られており，もし係数 α_1 が正の値を取れば，デューンの遷移過程は亜臨界分岐となり，負の値をとるとき超臨界分岐となる．そして亜臨界分岐のとき，ヒステリシスが現れる．

本論文は，第一章「序論」，第二章「理論的考察およびモデル」，第三章「掃流砂のみを考慮した弱非線型安定解析」，四章「浮遊砂を考慮した弱非線型安定解析」，第五章「河床波の遷移過程に関する実験」，第六章「結論および今後の展望」で構成されている．

第一章の序論に続いて，第二章では，本論文で適用する増幅率展開法を用いた弱非線型安定解析についてモデルの概念を述べる．

第三章では掃流砂のみを考慮した弱非線型安定解析を行った．その結果，流砂量における局所勾配の影響が小さい領域では，デューン河床から平坦床への遷移は亜臨界分岐となることが明らかとなった．これによって，流量と河床形態の間の関係に見られる二価性とそれによって発生するヒステリシスの原因が，デューン河床，平坦床遷移が亜臨界分岐であることに起因している可能性が示された．また，亜臨界分岐は，平均勾配が大きければ大きいほど，シールズ数が大きく局所勾配の影響が小さければ小さいほど現われ易くなることが明らかとなった．

第四章では浮遊砂の影響を考慮した解析を行った．線形安定解析の結果，底面摩擦速度に対する相対的な砂の沈降速度 R_f の値が小さくなるにしたがって，デューン発生の限界値を示す臨界フルード数の値は小さくなることがわかった．これによって，浮遊現象が活発になると平坦床からデューンへの遷移が生じるフルード数が低下することが明らかとなった．また，弱非線型安定解析の結果，浮遊砂の影響で臨界フルード数の値が小さくなっても，解の分岐形態に関しては掃流砂のみを考慮した場合と同様に，局所勾配の影響が小さい領域において亜臨界分岐が生じることが明らかとなった．この浮遊砂の影響を考慮した解析の結果を適用すると，利根川の昭和34年8月洪水の時に川俣地点で観測された現象は本理論によってほぼ説明できる．

第五章では流量の増加および減少過程におけるデューンの遷移過程再現する実験を行った．この実験の結果，流量の増加時に河床波が消滅する流量の値が，流量減少時に河床波が再び現われる流量の値よりも大きくなることが確認された．また，このとき遷移過程には流量の増加および減少時に異なる河床形態が現われるため，流量の増加および減少時において河床の抵抗が実河川で観測されているようなループを描くことも確認された．この実験で観測されたデューンの遷移過程は，第三章および第四章の弱非線型安定解析の結果によってほぼ説明することができる．

以上の結果より，図1のヒステリシスや図2に見られるような二価性の現われる遷移現象は，本理論で提案したような亜臨界分岐を用いて説明可能である．本理論で得られた結果は，デューンの遷移現象の定量的な予測に対し基本的な概念として重要な知見を与えるものであり，今後，洪水時における河道抵抗の予測に大きく貢献するものと期待される．

論文審査結果の要旨

洪水時における河床抵抗を精度良く予測することは河川工学上の重要な課題である．ところが移動床である自然河川では，河床上に河床波（デューン）が形成され，平坦床の場合に比べて著しい抵抗の増加が見られることが知られている．また流量の変化に対する河床波の応答特性は複雑であり，同一流量でも流量の増加時と減少時では異なる河床形態（ヒステリシス）が生じるため，河床抵抗も大きく変化することが指摘されてきた．このような複雑性のために精度の高い河床抵抗予測は著しく困難なものとなっている．本論文はこの様な背景の下，河床波—平坦床遷移時に見られるヒステリシス現象が層流—乱流遷移時に見られるヒステリシス現象と類似のものであるという観点から，弱非線型安定解析の手法を用いてヒステリシス現象の原因を理論的に明らかにしたものであり，全6章よりなる．

第１章は序論であり，研究の背景および既往の研究について述べ，本研究の位置づけを明らかにしている．

第２章では，実現象と理論モデルの関係，河床波—平坦床遷移時に見られるヒステリシス現象と乱流遷移時に見られるヒステリシス現象の類似性，弱非線型安定解析の代表的な手法である増幅率展開法の基本概念について詳しい説明を加えている．

第３章では，レイノルズ平均を行ったナビエストークス方程式と，局所勾配の影響を取り入れた掃流砂量式，河床の時間変化を記述するエクスナー方程式に，増幅率展開法と多重尺度法，特異摂動法を適用することによって弱非線型安定解析を行い，河床波—平坦床遷移過程が亜臨界分岐であることを明らかにしている．亜臨界分岐は乱流遷移時にも見られるものであり，そのヒステリシス現象の原因となっている．本章で行われた解析によって，河床波—平坦床遷移時に見られるヒステリシス現象もこの亜臨界分岐に起因していることを初めて明らかにした．これは重要な成果である．

第４章では，掃流砂のみならず浮遊砂輸送による河床変動を取り入れた弱非線型安定解析を行い，浮遊砂が活発に生じるような場合，臨界フルード数が減少し，遷移過程はやはり亜臨界分岐となることを明らかにした．これによって浮遊砂が活発に生じるような実河川で見られるヒステリシス現象も，本理論によって説明可能であることを示した．これは実用上重要な成果である．

第５章では，河床波—平坦床遷移過程を再現するために移動床水路実験を行い，同一流量の下でも流量増加時と減少時では河床形態が異なるため，抵抗に顕著な差が生じることを明らかにしている．また同時に実験結果は理論によって良好に説明できることを示している．解析結果の妥当性を実験によって自ら検証した意義は極めて大きく，重要な成果である．

第６章は結論である．

以上，本論文は河床波—平坦床遷移過程に見られるヒステリシス現象の原因が解の分岐形態にあることを，弱非線型安定解析の手法を用いて理論的に明らかにしたものである．これまで不明であった本現象の原因を初めて明らかにした意義は大きく，今後の河道抵抗予測技術の発展に資するところ極めて大である．

よって，本論文は博士（工学）の学位論文として合格と認める．